

Formes bilinéaires et formes sesquilinéaires Formes bilinéaires symétriques et formes hermitiennes.

Cas réel

E un $\mathbb{R}$ -ev

forme bilinéaire: $f: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(dx+g, y) = df(x, y) + f(g, y)$$

$$f(x, dy+g) = df(x, y) + f(x, g)$$

Forme bilinéaire symétrique: forme bilinéaire vérifiant $f(x, y) = f(y, x)$.

Matrice: ${}^tA = A$. $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Forme quadratique associée à une f.b.s:

$$q(x) = b(x, x)$$

applications

matrices

f.b.s: f

$\leftrightarrow$

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$f(x, y)$$

$\leftrightarrow$

$tXAY$

Chgt de base: $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\tilde{A} = {}^tPAP$$

f.b.s. définie pos si $f(x, x) > 0 \forall x \neq 0$

pos. si $f(x, x) \geq 0 \forall x$.

$$f.b.s. \leftrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$f.b.s. \text{ pos} \leftrightarrow \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

$$f.b.s. \text{ DP} \leftrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

une f.b.s. f pos $\Leftrightarrow Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$

$$f \text{ DP} \Leftrightarrow Sp(f) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n\}$$

f.b.s. $\Rightarrow$ $O_n(\mathbb{R})$ -diagonalisable.

Les f.b.s. sont classifiées par leur rang et leur signature pour l'act° de congruence

Cas complexe

E un $\mathbb{C}$ -ev.

forme sesquilinéaire: $f: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(dx+g, y) = df(x, y) + f(g, y)$$

$$f(x, dy+g) = \bar{d}f(x, y) + f(x, g)$$

Forme hermitienne: forme sesquilinéaire vérifiant $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.

Matrice: $A^* = A$. $A \in H$.

Forme quadr. associée à une forme hermitienne:

$$q(x) = b(x, x). \quad q(x) \in \mathbb{R}.$$

applications

matrices

forme sesqui.

f

$\leftrightarrow$

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$f(x, y)$$

$\leftrightarrow$

$$X^*AY$$

Chgt de base: $P \in GL_n(\mathbb{C})$

$$\tilde{A} = P^*AP$$

forme hermitienne def pos si $f(x, x) > 0 \forall x \neq 0$

pos si $f(x, x) \geq 0 \forall x$

$$\text{forme herm} \Leftrightarrow H(\mathbb{C}) \leftarrow \mathbb{R}\text{-ev.}$$

$$\text{forme herm pos} \Leftrightarrow H^+(\mathbb{C})$$

$$\text{forme herm DP} \Leftrightarrow H^{++}(\mathbb{C})$$

f forme hermitienne. Alors $Sp(f) \subset \mathbb{R}$

$$f \text{ pos} \Leftrightarrow Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$$

$$f \text{ DP} \Leftrightarrow Sp(f) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}), M^*M = I_n\}$$

f forme herm $\Rightarrow$ $U_n(\mathbb{C})$ -diagonalisable.

Les formes herm sont classifiées par leur rang pour l'action de congruence.